编者按：为密切编辑部与中学的联系，本刊编委第八次"走进课堂"，于 2013 年 10 月 25 日赴江苏省昆山中学听课交流. 江苏省昆山中学创办于 1946 年，1960 年被列入省重点普通中学，1980 年被确定为首批办好的省重点中学，2000 年被确认为国家级示范性普通高中，2004 年转为江苏省四星级普通高中. 学校秉承"让每一位学生都得到全面自主的发展"的办学宗旨，坚持以"弘扬爱国主义，提升人文素养，强化科学意识，造就优秀人才"为育人目标，大力弘扬"日知日行日成，求实求是求真"的昆中精神，牢固确立"素质为本，质量立校"的办学理念，坚持以"求知、务实、勤奋、进取"为校风，形成了"严谨求精"的教风和"勤奋求实"的学风. 学校先后荣获教育部依法治校示范校、江苏省文明单位等二十多项省部级集体荣誉. 学校将坚持走内涵发展道路，办优质特色学校，群策群力，励精图治，力争成为经济发达、外企云集地区"现代化程度高、示范性作用强、教育质量突出、办学特色鲜明"的优质特色高中.

回归教材，注重探究，促进学生的思维发展

——"正弦定理和余弦定理"一轮复习与反思

胡福林 （江苏省昆山中学 215300）

作者简介：胡福林，江苏省昆山中学副校长，苏州市名教师、中学数学学科带头人. 多年分管高三教学和任教高三数学，两次被评为苏州市优秀教育工作者，2008 年获得苏州市五一劳动奖章，2011 年被评为江苏省教育科研先进个人. 工作三十多年来，始终站在教学第一线，教书育人，致力学生创新精神与探索能力的培养. 课堂讲解深入浅出，力求揭示数学本质；设问抓住关键，注重点拨学生思维. 努力打造高效和谐课堂，课堂气氛轻松愉快，深受学生喜爱. 近些年在省级以上刊物上发表论文十多篇.

1 学情分析

教学对象是四星级高中的高三物化组合普通班学生，基础良好，有较强的自主学习能力、运算能力和综合运用知识解决问题的能力.

2 考点解读

解三角形是数学高考中重点考查内容之一，而正弦定理和余弦定理是解决有关三角形问题的两个重要定理. 高考对这一内容的考查既可能出现在填空题，也可能出现在解答题. 填空题通常以考查三角形边角互化为主的小综合题形式出现，有一定难度；解答题主要考查三角恒等变换、正弦定理、余弦定理的综合运用，试题基本源于课本，难度虽然不大，但要求考生具有一定的运算能力和灵活运用正弦定理、余弦定理解题的能力.

教学目标 (1) 理解正弦定理、余弦定理的向量证法，掌握利用正弦定理、余弦定理实现三角形边角互化的方法与途径；(2) 能根据条件灵活运用正弦定理、余弦定理解决三角形中的有关问题；(3) 通过三角函数、正弦定理、余弦定理、向量数量积等知识间的联系体现事物之间的普遍联系与辩证统一.

教学重点 能综合运用正弦定理、余弦定理解决三角形中的有关问题.

教学难点 合理选择正弦定理、余弦定理优化求解过程，解三角形中多解的取舍问题.

3 过程实录

3.1 学生自测反馈

用导学案辅助教学，课前以填空题的形式引导学生自主完成正弦、余弦定理的内容、变形、证明及其应用等知识的梳理，并留有下列自测题：

(1)（教材第 17 页）在 $\triangle ABC$ 中，若 $(a+b+c)(b+c-a)=3bc$，则 $A=$______.

(2)（教材第 10 页）在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a\cos A=b\cos B$，则 $\triangle ABC$ 的形状为______.

(3)（教材第 11 页）在 $\triangle ABC$ 中，已知 $c=10$，$A=45^\circ$，$C=30^\circ$，则 $\triangle ABC$ 的面积为______.

3.2 师生共同梳理

· 定理的证明

师：余弦定理、正弦定理有多种证明方法，请同学们回忆余弦定理的向量证法.

生 1：因为 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$，所以 $a^2=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AC}^2-2|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cos A+\overrightarrow{AB}^2=b^2-2bc\cos A+c^2$.

师：上述证法简单明了，充分体现了向量的工

具作用. 这里运用了向量的什么知识实现了几何与代数的转化?

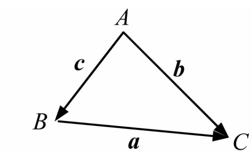

图 1

学生共同回答:向量的数量积公式.

师:正弦定理、余弦定理的向量证法,都是先构建三角形中的向量等式,然后利用向量的数量积运算将向量等式实数化,这是利用向量知识解决几何问题的一种重要方法与途径.

· 定理的应用

(1) 解三角形中的三种类型

师:如图 2,下列各三角形用正弦定理还是余弦定理求解?

生 1:三角形 ①② 中已知两边(两角)及其一对角(对边),可用正弦定理求解;三角形 ③④ 中已知三边和两边一夹角可用余弦定理求解.

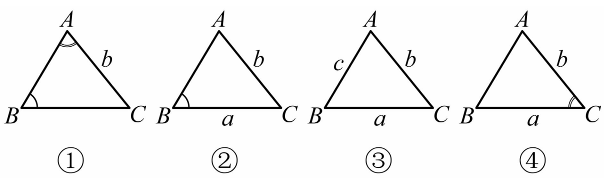

图 2

生 2:三角形 ② 还可以用余弦定理构建关于边 c 的一元二次方程求解.

师:归纳起来,三角形 ① 可用正弦定理求解,三角形 ③④ 可用余弦定理求解,三角形 ② 既可用正弦定理求解,也可以用余弦定理求解,这是可用正弦、余弦定理求解的三类三角形.

(2) 边角互化的两条途径

师:说说自测题 3 的解题思路.

生 6:利用正弦定理 $a=2R\sin A$,$b=2R\sin B$ 将边统一化成角,转化为三角问题求解.

生 7:还可以利用余弦定理的变形 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$,$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$ 将角统一化成边,转化为代数问题求解.

师:正弦定理、余弦定理的上述变形是实现三角形边角互化的两条常用途径.

(3) 三角形边角关系的一条规律

师:自测题 1 用什么定理求解? 本题正确求解的关键是什么?

生 3:用的是正弦定理,正确求解的关键是多解的取舍问题. 对于第 1 小题,由 $a<c$ 知角 A 为锐角,故仅有一解,而第 2 小题的答案应有两解.

师:很好!"大边所对的角较大"是多解取舍时常用依据之一. 再看下面的问题:在 $\triangle ABC$ 中,$\sin A=\frac{5}{13}$,$\cos B=\frac{4}{5}$,求 $\cos C$.

师:本题的关键是如何判定角 A 是锐角还是钝角.

生 4:角 A 不可能为钝角. 因为若 A 是钝角,则 $\cos A=-\frac{12}{13}$,又 $\sin B=\frac{3}{5}$,故可求得 $\cos C=\frac{68}{65}>1$,矛盾. 所以角 A 一定是锐角.

生 5:由 $\cos B=\frac{4}{5}$ 得 $\sin B=\frac{3}{5}$,所以 $\sin A<\sin B$,再由正弦定理得 $\frac{a}{2R}<\frac{b}{2R}$,即 $a<b$,故角 A 一定是锐角.

师:两位同学用不同方法都得到了正确结论,但比较而言生 5 的方法更具一般性. 一般地,在 $\triangle ABC$ 中,有 $\sin A>\sin B\Leftrightarrow a>b\Leftrightarrow A>B$. 这是解三角形中多解取舍依据的一条规律.

3.3　典型例题讲解

例 1　(2013 年北京高考题) 在 $\triangle ABC$ 中,$a=3$,$b=2\sqrt{6}$,$B=2A$.

(1) 求 $\cos A$ 的值;(2) 求 c 的值.

解　(1) $a=3$,$b=2\sqrt{6}$,$B=2A$,在 $\triangle ABC$ 中,由正弦定理得 $\frac{3}{\sin A}=\frac{2\sqrt{6}}{\sin 2A}$. 所以 $\frac{2\sin A\cos A}{\sin A}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$,故 $\cos A=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(2) *方法 1*(求出 $\sin C$ 后用正弦定理)　由 (1) 知 $\cos A=\frac{\sqrt{6}}{3}$,所以 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 又因为 $B=2A$,所以 $\cos B=2\cos^2 A-1=\frac{1}{3}$. 从而 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. 在 $\triangle ABC$ 中,$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{5\sqrt{3}}{9}$,所以 $c=\frac{a\sin C}{\sin A}=5$.

方法 2(求出 $\cos C$ 后用余弦定理)　略.

方法 3(构建关于边 c 的方程求解)　由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 得 $c^2-8c+15=0$,所以 $c=5$ 或 3. 又由 (1) 可求得 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{3}<\frac{\sqrt{2}}{2}$,故 $A<45^\circ$,$B<90^\circ$,从而可得 $C>45^\circ>A$,$c>3$,所以 $c=5$.

师:本例中,通过对题设及结论的分析,合理选择正弦定理或余弦定理找到简便的解题途径是关键. 解法 3 看似简单,其实因需排除增解实属不易. 对多解取舍除了依据前面讲到的"三角形中,大角所对的边较大或正弦值较大"外,本题中根据已知三角函数值估算出角的范围也是常用的方法.

探究：$\triangle ABC$ 中，若有 $B=2A$，三边 a,b,c 之间应满足什么条件？

生 8：由 $B=2A$ 得 $\cos B=2\cos^2 A-1$，然后用余弦定理将角化成边.

生 9：由 $B=2A$ 得 $\sin B=2\sin A\cos A$，用正弦、余弦定理将角化成边得 $b^2c=a(b^2+c^2-a^2)$.

师：生 8 虽然得到了三边间的关系式，但太复杂且不易化简，我们对此结论不满意. 生 9 的结论简单了很多，能否进一步化简？

生 10：可通过因式分解得到 $a=c$ 或 $b^2=a^2+ac$.

师(追问)：当 $a=c$ 时，b 与 a,c 的关系如何？

生 10：当 $a=c$ 时，$\triangle ABC$ 是一个等腰直角三角形，$b^2=2a^2$.

至此，学生发现结论 $a=c$ 包含在结论 $b^2=a^2+ac$ 中. 由此，我们得到了令人满意的结论：在 $\triangle ABC$ 中，若 $B=2A$，则 $b^2=a^2+ac$.

正当我们要结束本题的讨论时，班内平时不大说话的同学表示他有更简单的解法.

生 11：由 $B=2A$，得 $\sin(B-A)=\sin A$，即 $\sin B\cos A-\cos B\sin A=\sin A$. 又由正弦定理得 $b\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}-\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\cdot a=a$，化简即得 $b^2=a^2+ac$.

师：这真是一种大胆而巧妙的证法. 其大胆之处是敢于将 $B=2A$ 变形为 $B-A=A$，打破传统思维模式(用二倍角公式)，其巧妙之处是联用正弦定理、余弦定理化角为边，收到了意想不到的效果.

例 2 (教材第 16 页例 6 改编) 如图 3，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=4$，$AC=5$，$BC=6$，D 是 BC 上一点，且 $DC=2BD$，求 AD 的长.

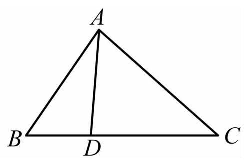

图 3

解 根据题意可知 $BD=2$，$DC=4$. 又由 $\angle ADB=180^\circ-\angle ADC$，得 $\cos\angle ADB=-\cos\angle ADC$，在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ADC$ 中分别由余弦定理得 $\dfrac{4+AD^2-16}{4AD}=-\dfrac{16+AD^2-25}{8AD}$，解得 $AD=\sqrt{11}$.

师：本题还有其他解法吗？(停顿一下) 由 $DC=2BD$ 可联想到什么知识？

生 12：还可用向量知识求解. 由 $DC=2BD$ 可知 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，两边平方得 $\overrightarrow{AD}^2=\dfrac{89}{9}+\dfrac{4}{9}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$，再在 $\triangle ABC$ 中由余弦定理可求得 $\cos A$，从而可求出 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$，问题获得解决.

生 13：不必求出 $\cos A$，直接可由余弦定理求得 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\cdot AC\cdot\cos A=\dfrac{1}{2}(AB^2+AC^2-BC^2)=\dfrac{5}{2}$.

师：解三角形问题归根到底是几何问题，因此解题中常需综合运用正弦定理、余弦定理及三角、向量等知识以达到简化解题过程的目的.

3.4 练习及课堂小结(略)

4 教学感悟

(1) 回归教材，变换形式进行数学“三基”的再强化

高三数学复习要重视回归教材，已是全体高三教师的共识. 但在回归教材的时间节点上，目前比较通行的是在高三一轮、二轮复习结束后距高考一个月的时间内进行，作为一轮与二轮全面、强化复习后的查漏补缺、“保温”训练. 这项工作固然必要，但数学“三基”的落实、数学素养的形成在平时，而非一朝一夕之功. 教材中定理和例习题具有典型性、示范性和关联性，它们或是渗透某些数学方法，或是体现某种数学思想，因此在高三一轮复习中，要认真分析教材与高考的连接点，充分利用教材相关资源，通过改编例习题的形式将相关重要知识点串起来，系统梳理知识，构建知识网络；通过挖掘教材中定理例题所隐含的数学思想方法(如本节课中余弦定理的向量证法中隐含的向量等式实数化的方法)，使学生了解到高考中所用的一些解题思想方法并非是无源之水，无本之木，而是来源于教材，从而使学生更易理解和掌握数学思想方法.

(2) 注重联系，“合纵连横”进行知识体系的再建构

高三一轮复习的重点是紧扣教材，夯实“三基”，但如果仅停留在教材知识的简单重复与罗列上，无法激起学生主动参与的兴趣. 复习过程中，不妨将分散在教材各章节中有联系的知识灵活“串联”起来，并以多种多样的方式加以呈现，让学生在回归教材时进行再整理、再综合，进而掌握不同知识的结合点，提高综合运用知识解题的能力，发展学生的联想、归纳、推理等思维能力.

(3) 突出探究，着眼能力进行核心原理的活运用

高三数学复习课容量大、时间紧，课堂上教师一言堂、满堂灌的现象较普遍. 实际上，高三数学复习中，教师精心选择好的素材和试题，适时让学生自主或师生合作进行解法的探究及知识的引申拓展，这不仅不会影响复习的进度，还会使高三课堂更充满活力，有利于促进学生思维的发展，培养学生的创新精神和实践能力，提高课堂教学的效率和品位.